第９講　複素数，２次曲線

31 実数 a，b に対し平面上の点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ を

$$(x_0,\ y_0)=(1,\ 0)$$
$$(x_{n+1},\ y_{n+1})=(ax_n-by_n,\ bx_n+ay_n)\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

によって定める．このとき，次の条件(ⅰ)，(ⅱ)がともに成り立つような $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

(ⅰ) $\mathrm{P}_0=\mathrm{P}_6$

(ⅱ) P_0，P_1，P_2，P_3，P_4，P_5 は相異なる．

《13 東大・理科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

32　$|z|>\dfrac{5}{4}$ となるどのような複素数 z に対しても $w=z^2-2z$ とは表されない複素数 w 全体の集合を T とする．

すなわち，$T=\left\{w \mid w=z^2-2z \text{ ならば } |z|\leqq\dfrac{5}{4}\right\}$ とする．このとき，T に属する複素数 w で絶対値 $|w|$ が最大となるような w を求めよ．

《05 東大・理科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

33　Oを原点とする座標平面上の曲線

$$C : y = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2}$$

と，その上の相異なる2点 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$ を考える．

(1)　P_i　$(i=1,\ 2)$ を通る x 軸に平行な直線と，直線 $y=x$ との交点を，それぞれ H_i　$(i=1,\ 2)$ とする．このとき $\triangle OP_1H_1$ と $\triangle OP_2H_2$ の面積は等しいことを示せ．

(2)　$x_1 < x_2$ とする．このとき C の $x_1 \leqq x \leqq x_2$ の範囲にある部分と，線分 P_1O，P_2O とで囲まれる図形の面積を，y_1，y_2 を用いて表せ．

《10東大・理科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　複素数，２次曲線

31 実数 a，b に対し平面上の点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ を

$$(x_0,\ y_0)=(1,\ 0)$$
$$(x_{n+1},\ y_{n+1})=(ax_n-by_n,\ bx_n+ay_n)\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

によって定める．このとき，次の条件(ⅰ)，(ⅱ)がともに成り立つような $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

(ⅰ)　$\mathrm{P}_0=\mathrm{P}_6$

(ⅱ)　P_0，P_1，P_2，P_3，P_4，P_5 は相異なる．

《13 東大・理科》

【答】　$(a,\ b)=\left(\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

【解説】　虚数単位を i として $\alpha_n=x_n+y_ni$，$\omega=a+bi$ とすると，$\alpha_{n+1}=\omega\alpha_n$ と表せる．

よって $\alpha_n=\alpha_0\omega^n$ なので $\alpha_0=1$ より $\alpha_n=\omega^n$　$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ である．

条件(ⅰ)より $\omega^6=\omega^0=1$ となるが，$|\omega^6|=1 \iff |\omega|^6=1$ より $|\omega|=1$ なので $\omega=\cos\theta+i\sin\theta$　$(0\leqq\theta<2\pi)$ とおくことができる．

このとき $\omega^6=\cos 6\theta+i\sin 6\theta=1$ となるものは $\theta=\dfrac{k}{3}\pi$　$(k=0,\ 1,\ \cdots,\ 5)$　であるが，

$k=0$，2，3，4 のとき，条件(ⅱ)を満たさない．

$k=1$，5 のとき，条件(ⅱ)を満たすので，求める a と b の組は $\boldsymbol{(a,\ b)=\left(\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}$.

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

32　$|z|>\dfrac{5}{4}$ となるどのような複素数 z に対しても $w=z^2-2z$ とは表されない複素数 w 全体の集合を T とする．

すなわち，$T=\left\{w \mid w=z^2-2z \text{ ならば } |z|\leqq\dfrac{5}{4}\right\}$ とする．このとき，T に属する複素数 w で絶対値 $|w|$ が最大となるような w を求めよ．

《05 東大・理科》

【答】 $w=-\dfrac{25}{16}$

【解説】 以下 i を虚数単位とする．

$z^2-2z=w \iff z^2-2z-w=0$ の 2 解を α，β とすると，解と係数の関係より $\alpha+\beta=2$ …①，$\alpha\beta=-w$ …②が成り立つ．

また，$|z|\leqq\dfrac{5}{4}$ より $|\alpha|\leqq\dfrac{5}{4}$ …③，$|\beta|\leqq\dfrac{5}{4}$ …④である．

このとき②より $|w|=|-\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$ であるが，③と④より $|w|\leqq\dfrac{25}{16}$ となる．

ここで等号成立は $|\alpha|=\dfrac{5}{4}$ かつ $|\beta|=\dfrac{5}{4}$ であるが，①より $\beta=2-\alpha$ なので，

$$|\alpha|=\frac{5}{4} \text{ かつ } |2-\alpha|=\frac{5}{4} \iff \alpha\overline{\alpha}=\frac{25}{16} \text{ かつ } (2-\alpha)(2-\overline{\alpha})=\frac{25}{16}$$
$$\iff \alpha\overline{\alpha}=\frac{25}{16} \text{ かつ } \alpha+\overline{\alpha}=2$$

なので，α と $\overline{\alpha}$ は $x^2-2x+\dfrac{25}{16}=0$ の 2 解なので，$\alpha=1\pm\dfrac{3}{4}i$.

よって $\beta=2-\alpha=1\mp\dfrac{3}{4}i$ （複号同順）つまり $\beta=\overline{\alpha}$.

よって $\boldsymbol{w}=-\alpha\beta=-\alpha\overline{\alpha}=-|\alpha|^2\boldsymbol{=-\dfrac{25}{16}}$ のとき $|w|$ は最大となる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

33　Oを原点とする座標平面上の曲線

$$C : y=\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+2}$$

と，その上の相異なる2点 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$ を考える．

(1)　P_i　($i=1,\ 2$) を通る x 軸に平行な直線と，直線 $y=x$ との交点を，それぞれ H_i　($i=1,\ 2$) とする．このとき $\triangle OP_1H_1$ と $\triangle OP_2H_2$ の面積は等しいことを示せ.

(2)　$x_1<x_2$ とする．このとき C の $x_1 \leqq x \leqq x_2$ の範囲にある部分と，線分 P_1O，P_2O とで囲まれる図形の面積を，y_1，y_2 を用いて表せ.

《10 東大・理科》

【答】　(1)　略　　(2)　$2\log\dfrac{y_2}{y_1}$

【解説】　(1)　$x \geqq 0$ のとき $y>0$,

$x<0$ のとき $y=\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+2}=-\sqrt{\frac{1}{4}x^2}+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+2}$ より $y>0$ である.

ここで $y=\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+2}$ $\iff$ $y-\frac{1}{2}x=\sqrt{\frac{1}{4}x^2+2}$

$$\iff y \geqq \frac{1}{2}x \text{ かつ } \left(y-\frac{1}{2}x\right)^2=\frac{1}{4}x^2+2$$

$$\iff y \geqq \frac{1}{2}x \text{ かつ } y(y-x)=2$$

であり，$y>0$ より C は $x=y-\dfrac{2}{y}$ かつ $x \leqq 2y$ と表せる.

このとき C 上の点Pは正の実数 t を用いて，$\left(t-\dfrac{2}{t},\ t\right)$ と表せる．この点を通り x 軸に平行な直線と $y=x$ との交点をHとすると $H(t,\ t)$ と表せるので,

$PH=t-\left(t-\dfrac{2}{t}\right)=\dfrac{2}{t}$．よって $\triangle OPH$ の面積は $\dfrac{1}{2}\times t\times PH=1$ となり，Pの座標に関らず，$\triangle OPH$ の面積は一定の値1をとる.

よって $\triangle OP_1H_1$ と $\triangle OP_2H_2$ の面積は等しいことが示された.

(2)　(1)の結果より，求める面積は C 上の P_1，P_2 の間の弧と，線分 P_1H_1，H_1H_2，H_2P_2 で囲まれる部分の面積なので

$$\int_{y_1}^{y_2}\left\{y-\left(y-\frac{2}{y}\right)\right\}dy=\int_{y_1}^{y_2}\frac{2}{y}dy=\Big[2\log|y|\Big]_{y_1}^{y_2}=\boldsymbol{2\log\frac{y_2}{y_1}}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。